ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №8
ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пример. Функция $f(x)=x^2$ имеет конечную производную в каждой точке $x\in R^1$. Действительно, при любом $x\in R^1$ имеем

$$f'(X)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Упражнение

Показать, что следующие функции имеют конечные производные в каждой точке $x\in R^1$.

1. $\boldsymbol{y}=3\boldsymbol{x}+5$. 2**.** $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^2-2\boldsymbol{x}+8$. **3.** $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^3+\boldsymbol{x}$. **4.** $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^4$. **5.** $\boldsymbol{y}=\dfrac{1}{\boldsymbol{x}^2+2}$.

Пример. Функция $f(x)=\sqrt[3]{x}$ имеет в точке $x_0=0$ бесконечную производную. Действительно,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}=+\infty$$

Упражнение

1. Функция $f(x)=\sqrt[5]{x^3}$ имеет в точке $x_0=0$ бесконечную производную.
2. Функция $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ имеет в точке $x_0=1$ бесконечную производную.

Покажем теперь случай, когда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$ но, не выполняется ни одно из условий $f'(x_0)=+\infty$ и $f'(x_0)=-\infty$. В этом случае говорят, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *не является бесконечностью определенного знака.* Это имеет место, если

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty,\ \text{а}\ \lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty.$$

Пример. Этим свойством обладает функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\sqrt{|\boldsymbol{x}|}$ (рис. 1) в точке $\boldsymbol{x}_0=0$**,** так как $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=+\infty$, а $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=-\infty$.

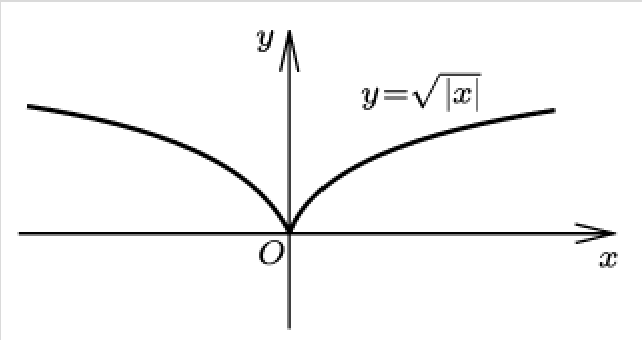

Рис. 1

Конечные или бесконечные пределы

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{и} \quad f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

называют сооттственно **левой и правой производными** функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Теорема. Функция $f(x)$ в точке x_0 производную $f'(x_0)$ тогда только тогда, когда односторонные производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ существуют и совпадают, т.е.

$$\boldsymbol{f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)}.$$

Пример. Функция $f(x)=|x|$ в не имеет производной в точке $x_0=0$, хотя в этой точке существуют конечные односторонные производные. Действительно, поскольку $\Delta y=|\Delta x|$ и поэтому

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1, \qquad f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

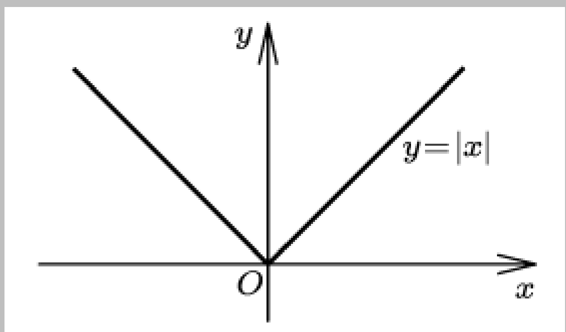

Рис. 2

Замечание. Так как $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$ для функции $f(x)=|x|$, то непрерывная в точке $x_0=0$ функция $y=|x|$ не имеет производной в этой точке. Этот пример показывает, что из непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 не следует существование ее производной в данной точке.

Упражнение

Показать, что функция $f(x)=|\ln x|$ в не имеет производной в точке $x_0=1$, хотя в этой точке существуют конечные односторонние производные.

Упражнение

Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad x\neq 0,\\ 0, & \text{если} \quad x=0,\end{cases}$$

не имеет односторонних производных при $\boldsymbol{x}_0=0$.

Пример. Доказать, что функции $y=C$, $y=x^n$ $(n\in \mathrm{N})$, $y=\sin x$, имеют производные в каждой точке $x\in R^1$, и найти эти производные.

Решение

а) Если $y=C$, C- постоянная, то $\Delta y=C-C=0$ и поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$, т.е.

$$C'=0.$$

б) Если $y=x^n$, где $n\in\mathrm{N}$, то

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=$$
$$=x^n+C_n^1x^{n-1}(\Delta x)+C_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2+\dots+C_n^{n-1}x(\Delta x)^{n-1}+(\Delta x)^n-x^n=$$
$$=C_n^1x^{n-1}(\Delta x)+C_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2+\dots+C_n^{n-1}x(\Delta x)^{n-1}+(\Delta x)^n,$$

откуда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=C_n^1x^{n-1}=nx^{n-1}$, т.е.

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}, \qquad n\in\mathrm{N}.$$

в) Если $y=\sin x$, то $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$, откуда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$. Так как $\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\to\cos x$ при $\Delta x\to 0$ в силу непрерывности функции $\cos\boldsymbol{x}$, а $\dfrac{\sin t}{t}\to 1$ при $\boldsymbol{t}\to 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x$, т.е.

$$(\sin\boldsymbol{x})'=\cos\boldsymbol{x}.$$

Упражнение

Доказать, что функции $y=\cos x$, $y=a^x$ имеют производные в каждой точке $x\in R^1$, и найти эти производные.

Пример. Найти производную функции $y = \log_a x$ ($a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$).

Решение Если $y = \log_a x$, то

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a(x) = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right), \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x},$$

откуда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a}$, так как $\frac{\log_a(1+t)}{t} \to \log_a e = \frac{1}{\ln a}$ при $t \to 0$.

Итак, если $\boldsymbol{a} > 0$, $\boldsymbol{a} \neq 1$, $\boldsymbol{x} > 0$, то

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Из формулы (11) при $a = e$ получаем

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}.$$

Упражнение

Найти производную функции $y = x^{\alpha}$ ($\alpha \in \kappa$, $x > 0$).

Пример. Издержки производства K зависят от объема продукции $\boldsymbol{x}$ по формуле

$$K = 100x - \frac{1}{30}x^3.$$

Определить предельные издержки, если объем производства составляет: а) 5 единиц; б) 10 единиц продукции.

Решение

Имеем: $K' = 100 - \frac{1}{10}x^2$, откуда $K'(5) = 100 - \frac{1}{10}5^2 = 97{,}5$; $K'(10) = 100 - \frac{1}{10}10^2 = 90$.

Это означает, что при объеме производства в 5 единиц продукции издержки по изготовлению следующей (шестой) единицы продукции составят 97,5; при объеме производства в 10 единиц они составят 90.

Пример. Функция цен спроса на какой-либо товар определяется формулой

$$p = 10 - 2x,$$

где x - спрос, p - цена.

Выручка от продажи товара есть

$$u = x(10 - 2x) = 10x - 2x^2,$$

откуда $u' = 10 - 4x^2$. Если, например, $x = 2$, то $u'(2) = 2$. Это означает, что если спрос возрастет с 2 до 3 единиц, то выручка возрастет приблизительно на 2 единицы.

Упражнение. Зависимость между издержками продукции y и объемом выпускаемой продукции x на предприятии выражается функцией $y = 10x + 50$. Определить предельные издержки при объеме продукции $x = 100$ единиц.

Упражнение. Зависимость издержек производства одного из предприятий от объема выпускаемой продукции x выражается формулой

$$y\left(x\right) = 40x - 0,03x^3.$$

Определить средние и предельные издержки при объеме продукции $x = 15$ ден. ед.

Упражнения

1. Объем продаж видеомагнитофонов задается следующей функцией времени:

$$V(t) = 5000 + 1000t - 100t^2$$

где t-время, измеряемое в месяцах,

V - количество видеомагнитофонов, проданных за месяц.

Найти скорость изменения объема продаж в момент времени:

а) $t = 0$; б) $t = 3$; в) $t = 6$.

2. Население некоторой страны растет по следующему закону:

$$P(t) = 100000(1 + t^2),$$

где время t- измеряется в годах. Найти скорость изменения населения в момент времени:

а) $t = 0$; б) $t = 2$; в) $t = 5$.

3. Эпидемия медленно распространяется среди населения . Число заболевших определяется формулой

$$A(t) = 200(t^{\frac{5}{2}} + t^2)$$

где t- число недель, прошедших с момента начала эпидемии.

Найти скорость изменения числа заболевших в момент времени:

а) $t = 1$; б) $t = 4$; в) $t = 9$.

4. Предположим, что издержки получения питьевой воды заданы формулой

$$C = \frac{10000}{p} - 100.$$

где p - процентное содержание загрязняющих воду примесей.

Найти скорость изменения издержек производства, если примеси составляют 5%.

Пример. Пусть заданы функции спроса y и предложения (количества товаров предлагаемого в единицу времени) z от цены x:

$$y = 10 - x, \qquad z = 3x - 6.$$

Найти:

а) цену равновесия при которой спрос и предложение уравновешиваются;

б) эластичность спроса и предложения для цены равновесия.

Решение

а) Цена равновесия находится из условия $y(x) = z(x)$, или $10 - x = 3x - 6$, откуда $x = 4$;

б) эластичность спроса $E_x(y)$ и предложения $E_x(z)$ находим по формуле (***). Имеем

$$y = 10 - x;$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 10 - (x + \Delta x) - (10 - x) = -\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{-\Delta x}{10 - x} : \frac{\Delta x}{x} = -\frac{x}{10 - x},$$

откуда

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{x}{10 - x}\right) = -\frac{x}{10 - x}.$$

Аналогично имеем

$$z = 3x - 6;$$

$$\Delta z = z(x + \Delta x) - z(x) = 3x + 3\Delta x - 6 - (3x - 6) = 3\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{z} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{3\Delta x}{3x - 6} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{3x}{3x - 6},$$

следовательно

$$E_x(z) = \frac{x}{x - 2}.$$

Таким образом, при $x = 4$ получаем

$$E_x(y) = -\frac{4}{10 - 4} = -\frac{2}{3}, \quad E_x(z) = \frac{4}{4 - 2} = 2.$$

Это означает, что при цене равновесия между спросом и предложением увеличение цены на 1% влечет уменьшение спроса на (2/3)% и возрастание предложения на 2%.

Упражнения

1. Найти эластичность функции спроса:

а) $\boldsymbol{p} + 5\boldsymbol{x} = 100$ в точке $p = 50$;

б) $3\boldsymbol{p} + 4\boldsymbol{x} = 120$ в точках $p = 15$ и $p = 20$;

в) $\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{p} + 4\boldsymbol{x} = 40$ в точках $p = 2$ и $p = 4$.

Как увеличение цены повлияет на выручку? При каких значениях p спрос является эластичным?

2. Найти эластичность функции спроса $xp = 5$ в точке $p = 10$. Как увеличение цены повлияет на выручку? Какой это тип эластичности?

3. Для следующих функций спроса найти значения p при которых спрос является эластичным:

а) $2\boldsymbol{p}+3\boldsymbol{x}=12$;

б) $\boldsymbol{x}=50(10-\sqrt{\boldsymbol{p}})$;

в) $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b} \quad (\boldsymbol{a}<0, \boldsymbol{b}>0)$.

4. Функция спроса имеет вид $\boldsymbol{p}=\sqrt{3600-\boldsymbol{x}^2}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 50$.

б) Посчитать приближенно процентное изменение спроса, если цена выросла на 11%.

5. Уравнение спроса имеет вид $\boldsymbol{p}=20-0{,}1\sqrt{\boldsymbol{x}}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 18$.

б) Вычислить приближенно процентное изменение спроса, если цена уменьшилась на 2%.

6. Уравнение спроса имеет вид $\boldsymbol{p}=100\sqrt{4-\boldsymbol{p}}$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 150 единиц;

б) 50 единиц.

7. Уравнение спроса имеет вид $(\boldsymbol{p}+1)\sqrt{\boldsymbol{x}+1}=100$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 24 единицы;

б) 15 единиц.

8. Для следующих функций спроса и предложения найти значение налога на единицу товара, максимизирующее доход государства:

а) $\begin{array}{l}\boldsymbol{p}=-3\boldsymbol{x}+124,\\ \boldsymbol{p}=2\boldsymbol{x}+14;\end{array}$ б) $\begin{array}{l}\boldsymbol{p}=250-2\boldsymbol{x}^2,\\ \boldsymbol{p}=700+3\boldsymbol{x}.\end{array}$

9. Найти значение налога, максимизирующее доход государства, если функции спроса и предложения имеют вид:

а) $\begin{array}{l}\boldsymbol{p}=800-0{,}5\boldsymbol{x},\\ \boldsymbol{p}=700+2\boldsymbol{x};\end{array}$ б) $\begin{array}{l}\boldsymbol{p}=8200-5\boldsymbol{x}^2,\\ \boldsymbol{p}=700+20\boldsymbol{x}^2.\end{array}$

Пример. Функция $y=x^2$ дифференцируема при любом x, так как $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\cdot(\Delta x)+(\Delta x)^2=2x\cdot(\Delta x)+o(\Delta x)$. При этом $dy=2x\,dx$.

Упражнение

Докажите, что функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x найдите производную и дифференциал:

1. $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^2-4$. **2.** $\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}$. **3.** $\boldsymbol{y}=3-5\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2$. **4.** $\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{x}^3$. **5.** $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^3$.

Упражнение

Найдите дифференциал функции:

1) $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^8$ при $\boldsymbol{x}=1$, $\Delta\boldsymbol{x}=0{,}1$;

2) $\boldsymbol{y}=\dfrac{1}{\boldsymbol{x}}$ при $\boldsymbol{x}=2$, $\Delta\boldsymbol{x}=-0{,}1$;

3) $\boldsymbol{y}=\sqrt{\boldsymbol{x}^3}$ при $\boldsymbol{x}=42{,}25$, $\Delta\boldsymbol{x}=\dfrac{2}{13}$.

Пример. Найти с помощью формулы $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$ приближенное значение функции $y=\sqrt[4]{x}$ при $x=90$.

Решение. Полагая в формуле $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$

$f(x)=\sqrt[4]{x}$**,** $x_0=81$**,** $\Delta x=9$ и учитывая, что $f(x_0)=\sqrt[4]{81}=3$, $f'(x)=\dfrac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}$**,** $f'(x_0)=\dfrac{1}{4\cdot 3^3}$ поручаем $\sqrt[4]{90}\approx 3+\dfrac{1}{12}$**,** т.е. $\sqrt[4]{90}\approx 3{,}083$**.**

Упражнение

Найти приближенное значение: 1) $\cos 31^\circ$; 2) $\lg 10{,}21$; 3) $\sqrt[5]{33}$; 4) $ctg\,45^\circ 10'$

Пример. Написать уравнение касательно к графику функции $f(x)=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0=4$.

Решение

Имеем

$$f(x_0)=\sqrt{4}=2,\qquad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}.$$

Следовательно, уравнение касательной имеет вид $y-2=\dfrac{1}{4}(x-4)$ или $y=\dfrac{1}{4}x+1$ (рис. 4).

Пример. Касательная графику функции $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $O(0,0)$будет вертикальной, так как данная функция непрерывна при $x=0$, а $f'(0)=+\infty$ (рис.5).

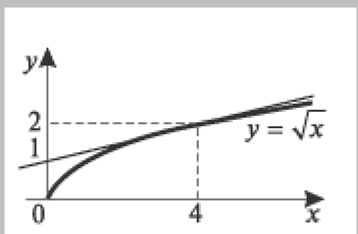

Рис. 4

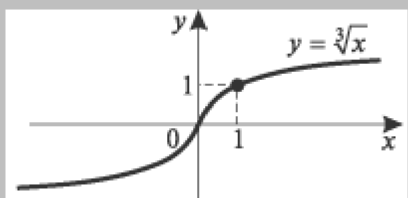

Рис. 5

Упражнение

1. Составьте уравнение касательной к графику функции

$$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}+1)\sqrt[3]{3-\boldsymbol{x}}$$

в точке $x=-1$.

2. Составьте уравнения касательных к графику функции $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}+4)$ в точках его пересечения с осями координат?

3. Под каким углом пересекается с осью *Oy* график функции $\boldsymbol{y}=\dfrac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{3+\boldsymbol{x}}}$?

Пример. Вычислить производную функции $y=\dfrac{e^x+4x^3}{\ln x}$.

Решение

Применения правила и сводку производных, имеем

$$y'=\frac{\left(e^x+4x^3\right)'\ln x-\left(e^x+4x^3\right)(\ln x)'}{\ln^2 x}=\frac{\left(e^x+12x^2\right)\ln x-\dfrac{e^x+4x^3}{x}}{\ln^2 x}.$$

Пример. Для функции $y=a^x arctg\, x$ ее производная

$$y'=\left(a^x\right)' arctg\, x+a^x\left(arctg\, x\right)'=a^x\cdot\ln a\cdot arctg\, x+\frac{a^x}{1+x^2}.$$

Пример. Производная функции $y=3^{\cos^5 2x}$ равна

$$y'=3^{\cos^5 2x}\ln 3\left(\cos^5 2x\right)'=3^{\cos^5 2x}\ln 3\cdot 5\cos^4 2x(\cos 2x)'=$$

$$5\ln 3\cdot 3^{\cos^5 2x}\cos^4 2x(-\sin 2x)(2x)'=-10\ln 3\cdot\sin 2x\cos^4 2x\cdot 3^{\cos^5 2x}.$$

Пример. Дифференциал функции $y=tg^4 6x$ равен

$$dy=4tg^3 6x d(tg\, 6x)=4tg^3 6x\frac{1}{\cos^2 6x}d(6x)=\frac{24tg^3 6x}{\cos^2 6x}dx=\frac{24\sin^3 6x}{\cos^5 6x}dx.$$

Пример. Вычислить производную функции $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$, $\quad (x<1)$.

Решение

Предварительно преобразуем эту функцию к виду

$$y=\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{4}\ln(1-x).$$

Тогда

$$y'=\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{1+x^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{1-x}=\frac{2x+1-x^2}{4(1-x)\left(1+x^2\right)}.$$

1. 1) $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}+\sin\boldsymbol{x}$; 2) $\boldsymbol{y}=\dfrac{1}{3}2^{\boldsymbol{x}}-\ln\boldsymbol{x}$; 3) $\boldsymbol{y}=3\arcsin\boldsymbol{x}-\dfrac{\arccos\boldsymbol{x}}{5}$.

2. 1) $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}^{x}\operatorname{tg}\boldsymbol{x}$; 2) $\boldsymbol{y}=\sin\boldsymbol{x}\cdot 3^{x}$ 3) $\boldsymbol{y}=\dfrac{\operatorname{arctg}\boldsymbol{x}}{1+\boldsymbol{x}^{2}}$; 4) $\boldsymbol{y}=\dfrac{\sin\boldsymbol{x}+\cos\boldsymbol{x}}{\sin\boldsymbol{x}-\cos\boldsymbol{x}}$.

3. 1) $\boldsymbol{y}=\sin 3\boldsymbol{x}$ 2) $\boldsymbol{y}=\cos\dfrac{\boldsymbol{x}}{2}$; 3) $\boldsymbol{y}=\ln^{2}\boldsymbol{x}$; 4) $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}^{5\boldsymbol{x}-1}$; 5) $\boldsymbol{y}=\sqrt{\operatorname{tg}\boldsymbol{x}}$;
6) $\boldsymbol{y}=\arcsin 3\boldsymbol{x}$ 7) $\boldsymbol{y}=\arccos^{3}\boldsymbol{x}$; 8) $\boldsymbol{y}=2^{1-\boldsymbol{x}}$.

4. $\boldsymbol{y}=\sin(\boldsymbol{x}^{2}-5\boldsymbol{x}+1)+\boldsymbol{tg}\dfrac{5}{\boldsymbol{x}}$ **.** **5.** $\boldsymbol{y}=\ln\cos^{2}\dfrac{\boldsymbol{x}}{2}$. **6.** $\boldsymbol{y}=\sqrt[3]{\sin^{2}\boldsymbol{x}}+\dfrac{1}{\cos^{2}\boldsymbol{x}}$ **.**

7. $\boldsymbol{y}=\ln\sqrt[3]{\cos\boldsymbol{x}+\sqrt{2}}$. **8.** $\boldsymbol{y}=\sqrt[3]{2\boldsymbol{e}^{x}+2^{x}+1}$. **9.** $\boldsymbol{y}=\operatorname{arctg}\ln\boldsymbol{x}+\ln(\operatorname{arctg}\boldsymbol{x})$.

10. $\boldsymbol{y}=\ln(\boldsymbol{x}-1)\sqrt[3]{(\boldsymbol{x}+1)^{2}(\boldsymbol{x}-2)}$. **11.** $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}^{\arccos\sqrt{\boldsymbol{x}^{3}-4}}$.

12. $\boldsymbol{y}=\dfrac{\sin\boldsymbol{x}}{2\cos^{2}\boldsymbol{x}}-\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\boldsymbol{x}}{2})$. **13.** $\boldsymbol{y}=\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\dfrac{\boldsymbol{x}}{2}-\dfrac{\cos\boldsymbol{x}}{2\sin^{2}\boldsymbol{x}}$.

14. $\boldsymbol{y}=-\sin\boldsymbol{x}(1+\ln\cos\boldsymbol{x})$. **15.** $\boldsymbol{y}=\arcsin\dfrac{1-\boldsymbol{x}^{2}}{1+\boldsymbol{x}^{2}}$. **16.** $\boldsymbol{y}=\operatorname{arctg}\dfrac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{1+\boldsymbol{x}^{2}}}$.

17. $\boldsymbol{y}=\operatorname{arctg}\dfrac{2\boldsymbol{x}^{4}}{1-\boldsymbol{x}^{8}}$. **18.** $\boldsymbol{y}=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-\boldsymbol{x}}{1+\boldsymbol{x}}}$. **19.** $\boldsymbol{y}=\arccos\dfrac{5\boldsymbol{x}+1}{\boldsymbol{x}^{2}+2}$.

20. $\boldsymbol{y}=\dfrac{\boldsymbol{x}\arcsin\boldsymbol{x}}{\sqrt{1-\boldsymbol{x}^{2}}}+\ln\sqrt{1-\boldsymbol{x}^{2}}$.

Пример. Для функции $y=(\cos x)^{\sin x}$, $(\cos>0)$ имеем $|y|=y$ и, следовательно,

$$\ln y=\sin x\ln(\cos x).$$

Тогда $\dfrac{y'}{y}=\cos x\ln(\cos x)+\sin x\dfrac{-\sin x}{\cos x}$, откуда

$$y'=(\cos x)^{\sin x}\left[\cos x\ln(\cos x)-\frac{\sin^{2}x}{\cos x}\right].$$

Пример. Для функции $y=\sqrt[5]{\dfrac{\sin 5x}{1-\sin 5x}}$ имеем

$$\ln|y|=\frac{1}{5}\ln|\sin 5x|-\frac{1}{5}\ln|1-\sin 5x|.$$

Тогда $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\cos 5x}{\sin 5x}\cdot 5-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{-5\cos 5x}{1-\sin 5x}=\dfrac{ctg\,5x}{1-\sin 5x}$, откуда

$$y'=\sqrt[5]{\frac{\sin 5x}{1-\sin 5x}}\cdot\frac{ctg\,5x}{1-\sin 5x}.$$

Упражнения

1. Найти производную показательно-степенной функции $z=u(x)^{v(x)}$, где u, v - функции, дифференцируемые в точке x, причем $u(x)>0$.

2. Найти $f'(x)$, $g'(x)$, если:

а) $f(x)=x^x$; *б*) $g(x)=x^{x^x}$.

3. Пусть функция f дифференцируема на интервале $(-a,\ a)$. Доказать, что если $f(x)$ - четная функция, то ее производная $f'(x)$ - нечетная функция, а если $f(x)$ - нечетная функция, то $f'(x)$ - четная.

Упражнение

В следующих примерах вычислите производную, применив метод логарифмического дифференцирования.

1. $y=(\mathrm{ctg}x)^{x^3}$.

2. $y=(x^2+3)^{\sqrt{x}}$.

3. $y=(\cos x)^{\mathrm{arctg}x}$.

4. $y=(\sqrt{\mathrm{tg}\,x})^{x+1}$.

5. $y=(x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$.

6. $y=x^{\frac{x}{\ln^2 x}}$.

7. $y=(x-1)\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^{-\frac{1}{5}}}$.

8. $y=(x+1)^2\cdot\sqrt[5]{(x-3)^4(4-x)^{-\frac{2}{3}}}$.

Пример. Если функция $y=f(x)$задана параметрический соотношениями $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t\ (-\infty<t<\infty)$, где a и b - положительные постоянные, то $y'_t=3b\sin^2 t\cos t,\ x'_t=-3a\cos^2 t\sin t$. При $t\neq\pi k/2\,(k=0,\pm1,\pm2,\ \dots)$ производная $x'_t\neq 0$. Следовательно, при этих значениях t получаем

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{3b\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t}=-\frac{b}{a}tg\,t\,.$$

Далее,

$$y''_{xx}=\left(-\frac{b}{a}tg\,t\right)'_x=\left(-\frac{b}{a}tg\,t\right)'_x t'_x=-\frac{b}{a\cos^2 t}\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{b}{3a^2\cos^4 t\sin t}.$$

Упражнение

Найдите $\frac{d^2y}{dx^2}$ для следующих функций:

1. $\begin{cases} \boldsymbol{x} = \ln \boldsymbol{t}, \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{t}^3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \boldsymbol{x} = \operatorname{arctg} \boldsymbol{t}, \\ \boldsymbol{y} = \ln(1 + \boldsymbol{t}^2). \end{cases}$

3. $\begin{cases} \boldsymbol{x} = \arcsin \boldsymbol{t}, \\ \boldsymbol{y} = \sqrt{1 - \boldsymbol{t}^2}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \cos^3 \boldsymbol{t}, \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \sin^3 \boldsymbol{t}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \boldsymbol{x} = \sin \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t} \cos \boldsymbol{t}, \\ \boldsymbol{y} = \cos \boldsymbol{t} + \boldsymbol{t} \sin \boldsymbol{t}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{at}}, \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{at}}. \end{cases}$